

文章编号: 1000-7598-(2007)增刊-0295-05

自适应自然单元法研究——自适应细化

卢 波, 丁秀丽, 邬爱清

(长江科学院 水利部岩土力学与工程重点实验室, 武汉 430019)

摘 要: 对 h 型自适应自然单元法的自适应细化方案进行了初步研究。在 ZZ 误差分析的基础上实现了节点的自动加密, 使得随着自适应细化的进行, 求解误差减小, 而且误差分布趋于均匀。在数值分析中, 主要有两种误差来源——插值误差和积分误差。随着节点的加密, Delaunay 三角形的尺寸随之减小, 三角形内的应力场趋于线性分布, 那么插值误差和积分误差也都会随之减小。因而, h 型自适应分析可以同时减小上述两种误差而达到不断提高求解精度的目的。由于自然单元法求解依赖于求解域内离散节点的 Voronoi 结构, 建议的细化方案中新节点的引入只需局部调整 Delaunay 结构, 算法的实现极为容易, 程序实现简单、高效。研究表明, 建议的自适应方案是可行的, 自然单元法特别适合进行 h 型自适应分析。

关 键 词: 计算力学; 自然单元法; h 自适应分析; 自适应细化

中图分类号: O 241

文献标识码: A

Study of the adaptive natural element method — adaptive refinement

LU Bo, DING Xiu-li, WU Ai-qing

(Key Laboratory of Geotechnical Mechanics and Engineering of the Ministry of Water Resources,
Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430019, China)

Abstract: A preliminary study is made of the h-adaptive refinement scheme for the Natural Element Method(NEM). The solution error is estimated by using the ZZ error estimator which is based on the recovery stress field acquired through the MLS/NNI stress recovery scheme according to the character of the NEM. Then new nodes are inserted automatically according to the error distribution information acquired. With the process of the adaptive analysis, the solution error reduced and the distribution of the error tend to be uniform. In numerical analysis, there is mainly two sources of error, namely the interpolation error and integration error, with the increase in nodes, the size of Delaunay triangle decreases and the stress tend to be linear, so the interpolation error and integration error decreases accordingly. In the process of adaptive analysis, solution errors can be reduced and the accuracy improved. The Voronoi tessellation is needed in the NEM analysis, the refinement scheme presented is just involved in the local adjustment of the Delaunay Tessellation. The implementation of adaptive process is effective and efficient. Numerical examples show that the adaptive scheme is successful and NEM is especially suitable for h-adaptive analysis.

Key words: computational mechanics; natural element method; h-adaptive analysis; adaptive refinement

1 引 言

自然单元法^[1-3]采用自然相邻节点插值方法在全域构造近似函数和试函数, 其形函数的计算量小, 且满足 Delta 函数的性质, 兼有无网格的特性和传统有限元的优点, 特别适合岩土工程问题的计算。一般而言, 岩土工程问题其真实解是未知的, 因此, 在误差分析的基础上进行自适应

计算是很有必要的。在无网格方法中, 节点可以根据需要较容易的引入、移动和删除。因此, 与有限元方法相比更适合进行自适应分析^[4]。

在自适应分析中主要存在两个问题: 误差分析和自适应细化。前者要求对近似求解过程中的局部和整体误差作出有效的估计; 后者则根据误差信息决定是否需要细化分析以及需要细化的区域和细化方案。这两个方面对自适应分析的

收稿日期: 2007-05-31

基金项目: 国家自然科学基金重大项目 (No.50539110); 国家自然科学基金重大项目 (No.50639090); 长江科学院科研基金资助项目“自然单元法在岩土工程中的应用研究”。

作者简介: 卢波, 男, 1977 年生, 博士, 主要从事岩土力学与岩土工程数值分析方面的研究工作。E-mail: lubo_cky@126.com

性能起着决定性的影响。鉴于 ZZ 方法在有限元自适应分析中的成功应用以及近年来在无网格伽辽金方法误差估计中的高效应用^[5-7], 笔者尝试将其应用于自然单元法的求解误差估计。文献[8]基于 ZZ 方法将恢复应力场替代真实应力场成功地进行了 NEM 求解误差估计。本文对自适应细化方案进行了研究, 其主要目标是在误差分析的基础上根据误差的分布信息进行自适应细化分析, 使得随着节点的加密, 求解误差减小, 而且误差的分布趋于均匀。

2 自适应细化方案研究

无网格方法中由于节点之间没有如有限元中固定的拓扑关系, 因而根据误差分布信息进行自适应加密相对有限元而言较容易实现。一般来说, 自适应细化程序应使得随着节点的加密, 整个求解域内的误差分布尽可能地均匀。

根据自然单元法的特点, 很适合进行 h 型自适应分析。误差估计的任务是对当前解的求解误差进行合理的估计分析, 而自适应细化则是根据误差分布信息决定如何加密节点进行局部细化。

2.1 误差的来源

在数值分析中, 主要有两种误差来源——插值误差和积分误差。NEM 插值函数只是对真实函数的一种数值逼近, 并不一定与之完全吻合, 即存在着一定的插值误差。由于 NEM 形函数没有显式表达式, 因此, 很难真实地度量这种隐式数值逼近的插值误差。这与有限元的显式逼近是不同的。

另外, 文献[9]的研究指出, 弱形式的数值积分也存在着一定的误差。无网格方法中对弱形式的积分误差的控制较有限元中困难。因为在无网格方法中, 一方面其形函数是没有显式表达式的分式函数, 不同于有限元方法多项式形式的形函数, 一般建议采用高阶高斯积分方案; 而另一方面又存在着背景积分域与形函数紧支域不一致的问题, 这是无网格方法所特有的, 可谓是“与生俱来”的。

可以预见, 随着节点的加密, Delaunay 三角形的尺寸随之减小, 三角形内的应力场趋于线性分布, 那么插值误差和积分误差也都会随之减小。因而, h 型自适应分析可以同时减小上述两种误差而达到不断提高求解精度的目的。

2.2 自适应细化方案

自适应细化的目标是 NEM 求解达到使其能

量范数相对误差 η_{fin} 小于某一给定值 η_{tar} :

$$\eta_{\text{fin}} \leq \eta_{\text{tar}} \quad (1)$$

设 σ 为求解域内的真实应力, σ^h 为 NEM 求解得到的应力 (除节点外), 则以能量范数形式表达的全域误差 $\|e_u\|$ 为

$$\begin{aligned} \|e_u\| &= \left\{ \int_{\Omega} (\sigma - \sigma^h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma^h) d\Omega \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_{\Omega} (Be_u)^T D^{-1} (Be_u) d\Omega \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \int_{\Omega} e_{\sigma}^T D^{-1} e_{\sigma} d\Omega \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2)$$

一般情况下, σ 是未知的, 因此真实的能量误差范数不得而知。ZZ 误差估计的本质是用恢复的应力解 σ^R 代替真实应力得到估计的能量误差范数为^[10]

$$\|\bar{e}_u\| = \left\{ \int_{\Omega} (\sigma^R - \sigma^h)^T D^{-1} (\sigma^R - \sigma^h) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (3)$$

同时, 真实的能量范数 $\|u\|$ 是事先未知的, 在自适应分析过程中, 将 NEM 数值解的能量范数作为 $\|u^h\|$ 其近似表达, 即

$$\|u\| \approx \|u^h\| = \left\{ \int_{\Omega} (\sigma^h)^T D^{-1} (\sigma^h) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (4)$$

由上式可得到估算的相对误差 $\bar{\eta}$ 其表达式为

$$\eta \approx \bar{\eta} = \frac{\|\bar{e}_u\|}{\|u^h\|} \quad (5)$$

自适应 NEM 求解程序自动结束, 如果下式得到满足:

$$\bar{\eta} \leq \eta_{\text{tar}} \quad (6)$$

2.3 全局细化指示与局部细化指示

根据自适应有限元分析的经验, 自适应分析将得到较优化的效果, 如果求解过程中的全局误差和局部误差同时得到较好的控制。由式 (1) 和式 (5), 可得到全局细化指示的定义为

$$\xi_g = \frac{\|\bar{e}_u\|}{\eta_{\text{tar}} \|u^h\|} \quad (7)$$

很显然, 当 $\xi_g \leq 1$ 时, 则意味着全局误差准则即式 (4) 得到了满足; 而 $\xi_g > 1$ 时, 则意味着要进行细化分析。

全局细化指示仅能够表明是否需要细化分析, 但并没有指出哪些局部需要细化以及如何细化。为了构造较优的节点分布, 需要知道每个局部的误差分布信息, 这里定义一个基于误差范数密度的局部准则。

设 Ω 为整个求解域的面积度量, Ω_i 为求解域内某一子域的面积, 在本文中即为 Delaunay 三角形的面积。定义 φ_i 为

$$\varphi_i = \frac{\|e_u\|_i^2}{\Omega_i} \quad (8)$$

式中: $\|e_u\|_i$ 为子域 Ω_i 上的能量误差范数, 即 φ_i 为子域 Ω_i 上单位面积上能量误差范数的平方。同样, 可以定义:

$$\varphi = \frac{\|e_u\|^2}{\Omega} \quad (9)$$

若整个求解域内的误差均匀分布, 则有

$$\varphi_i = \varphi \quad (10)$$

也即是:

$$\frac{\|e_u\|_i^2}{\Omega_i} = \frac{\|e_u\|^2}{\Omega} \quad (11)$$

若在子域 Ω_i 上要求满足式(4), 则子域 Ω_i 上的局部误差准则可表达为

$$\|e_u\|_i \leq \eta_{\text{tar}} \|u\| \sqrt{\frac{\Omega_i}{\Omega}} \quad (12)$$

一般地, 在自适应分析过程中, $\|e_u\|_i$ 的准确值是未知的, 因此按下式进行估算:

$$\|\bar{e}_u\|_i \leq \eta_{\text{tar}} \|u^h\| \sqrt{\frac{\Omega_i}{\Omega}} \quad (13)$$

式中: $\|\bar{e}_u\|_i$ 为子域 Ω_i 上估算的能量误差范数, 其定义为

$$\|\bar{e}_u\|_i = \left\{ \int_{\Omega_i} (\sigma^p - \sigma^h)^T D^{-1} (\sigma^p - \sigma^h) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (14)$$

因而, 可得到局部子域 Ω_i 上的局部误差指示 ξ_i , 其表达式为

$$\xi_i = \sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_i}} \frac{\|\bar{e}_u\|_i}{\eta_{\text{tar}} \|u^h\|} \quad (15)$$

根据上述的局部误差指示就可以判断某子域是否需要细化。当 $\xi_i > 1$ 时, 则需要细化; 当 $\xi_i \leq 1$ 时, 则不需要细化; 当 $\xi_i = 1$ 时, 则意味着该子域上的误差分布与全域上的误差分布密度相同, 即该子域内的节点分布较为理想。

在 NEM 分析中没有任何单元离散、覆盖求解域, 实现应用局部误差准则的最方便的途径是在背景积分子域即 Delaunay 三角形上应用局部误差指示, 细化分析基于背景网格进行, 这样局

部误差准则将在整个求解域内实施。而且由于 Delaunay 三角形完整地覆盖了整个求解域, 因而有:

$$\|\bar{e}_u\|^2 = \sum_{i=1}^{NDT} \|\bar{e}_u\|_i^2 \quad (16)$$

式中: NDT 为问题域内 Delaunay Triangle 的个数。

应该注意到, 局部误差指示是用于确定局部子域是否需要加密节点进行细化, 而并不是整个自适应分析是否停止的判断标准。全局误差指示用于判断是否进行下一步的细化分析。整个自适应分析的流程见图 1。

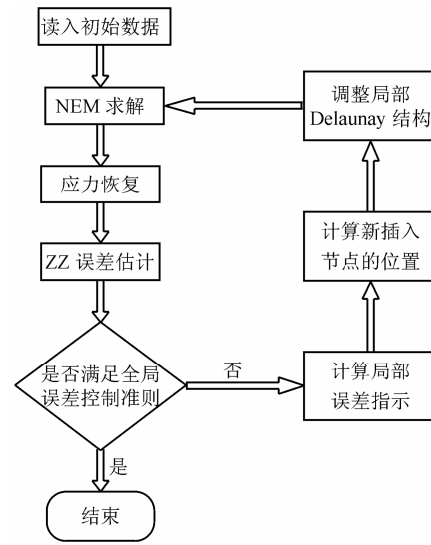


图 1 自适应分析程序流程图
Fig.1 Flow chart of adaptive analysis

2.4 新节点的引入和局部 Delaunay 结构的调整

在自适应分析中, 当未达到所要求的求解精度时, 问题域需要进行细化。一般来说, 没有必要对整个求解进行全面的细化, 因为通常只是局部地方的求解精度较差。为了提高细化分析的效率, 只需将注意力集中到这些求解误差较大的地方即可。为此本文采用了局部细化方案, 它基于局部 Delaunay 结构的调整。详细如下:

(1) 新节点的引入: 对于锐角三角形, 将其形心作为新的节点引入; 对钝角三角形, 将其最大边的中点作为新的节点引入。

(2) 局部 Delaunay 结构的调整: 将新插入的节点引入已有的 Delaunay 结构, 进行局部 Delaunay 三角化。

在已有 Delaunay 结构中插入新节点的算法较为成熟, 这里不再赘述。由于上述过程只会影响局部的 Delaunay 结构, 因此, 很容易实现, 非

常高效,特别是在节点数较多的情况下。

3 算 例

这里给出了无限大中心圆孔板问题的自适应分析结果,问题描述如图 2 所示,数值分析中的参数为: $a=1$, $p=1$, 计算时取第 1 象限的 1/4 部分即可,不计自重。按平面应变问题分析,其理论解见文献[11],对若形式积分采用的基于平均应变的单点积分方案^[12]。图 3 所示为 4 次细化分析节点自动加密的过程;图 4~6 为应力场等值线图。从图中可以看出,节点自动在应力集中的地方加密,这是节点自适应加密的结果。图 7 反映了能量误差范数随自适应细化过程进行的变

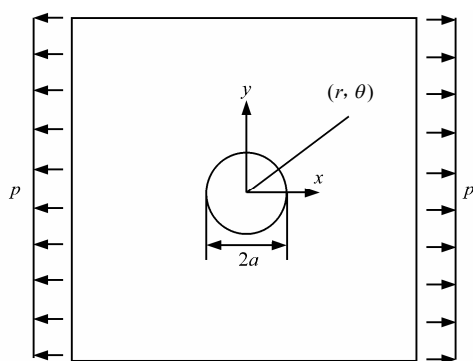


图 2 无限大的中心圆孔平板受水平均布拉力
Fig.2 A square plate as a portion of an infinite plate with a circular hole subjected to a horizontal tensile traction

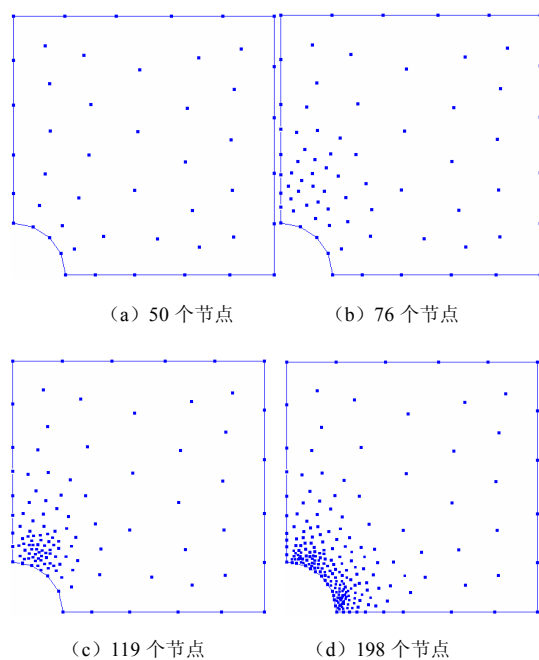


图 3 节点自动加密变化图
Fig.3 The adaptive refinement process

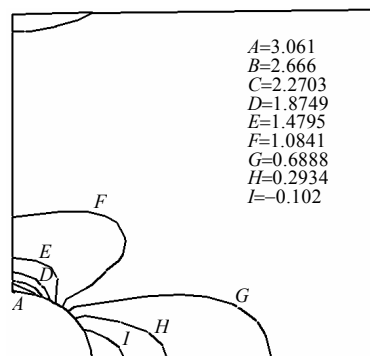


图 4 σ_x 等值线图 (单位: MPa)
Fig.4 Contour of σ_x (unit: MPa)

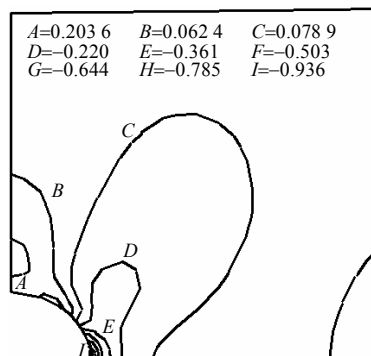


图 5 σ_y 等值线图 (单位: MPa)
Fig.5 Contour of σ_y (unit: MPa)

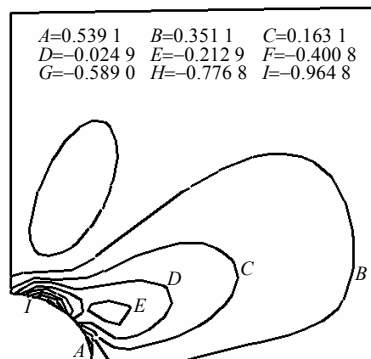


图 6 τ_{xy} 等值线图 (单位: MPa)
Fig.6 Contour of τ_{xy} (unit: MPa)

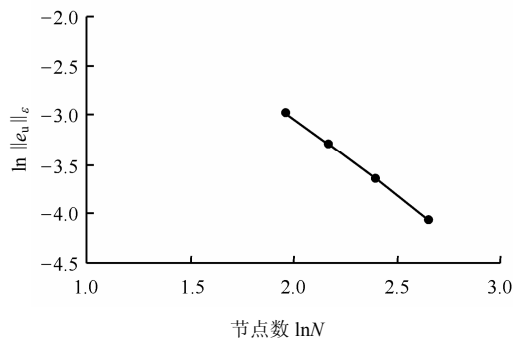


图 7 能量误差范数 $\|e_u\|_\epsilon$ 随节点个数 N 变化图
Fig.7 The variation of the energy error norm with the number of nodes

化, 图中 N 为计算模型中的节点数, E_u 为应变能误差范数。

4 结 论

本文对自然单元法的 h 型自适应分析进行了初步的研究。在 ZZ 误差分析的基础上实现了节点的自动加密, 以使得随着自适应细化的进行求解误差减小, 而且误差分布趋于均匀。研究表明, 随着节点的自动加密, 可以达到使插值误差和积分误差同时减小, 局部误差和全局误差同时得到较好的控制。由于自然单元法求解依赖于求解域内离散节点的 Voronoi 结构, 采用本文建议的细化方案, 新节点的引入只需局部调整 Delaunay 结构, 实现极为容易。研究表明, 自然单元法特别适合进行 h 型自适应分析。

参 考 文 献

- [1] Braun J, Sambridge M. A numerical method of solving partial differential equations on highly irregular evolving grids[J]. **Nature**, 1995, 376: 655—660.
- [2] Sukumar N, Moran B, Belytschko T. The natural element method in solid mechanics[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1998, 43(5): 839—887.
- [3] Sukumar N, Moran B, Yu Semenov A, et al. Natural neighbour Galerkin methods[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50: 1—27.
- [4] 卢波. 自然单元法的发展及其应用[博士学位论文 R]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2005.
- [5] Chung H J, Belytschko T. An error estimate in the EFG method[J]. **Computational Mechanics**, 1998, 21: 91—100.
- [6] Lee C K, Zhou C E. On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method Part I stress recovery and a posteriori error estimation[J]. **Computers & Structures**, 2004, 82: 413—428.
- [7] Lee C K, Zhou C E. On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method Part II adaptive refinement [J]. **Computers & Structures**, 2004, 82: 429—443.
- [8] 卢波, 葛修润, 王水林. 自适应自然单元法研究——误差估计[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24 (22): 4 065—4 072.
LU bo, GE Xiu-run, WANG Shui-lin. Study on the adaptive natural element method—error estimation[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(22): 4 065—4 072.
- [9] Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of galerkin weak form in meshfree methods[J]. **Computational Mechanics**, 1999, 23: 219—230.
- [10] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1987, 24: 337—57.
- [11] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity (3rd edition)[M]. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [12] 卢波, 葛修润, 王水林. 自然单元法数值积分方案研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24 (11): 1 917—1 924.
LU bo, GE Xiu-run, WANG Shui-lin. Study of the numerical integration of natural element method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(11): 1 917—1 924.